Лекция 2

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ САУ И САР

**1. Принципы построения математических моделей САУ и САР**

***Цель любого управления*** – изменить состояние объекта нужным образом (в соответствии с заданием). Теория автоматического регулирования должна ответить на вопрос: «как построить регулятор, который может управлять данным объектом так, чтобы достичь цели?» Для этого разработчику необходимо знать, как система управления будет реагировать на разные воздействия, то есть нужна *модель* системы: объекта, привода, датчиков, каналов связи, возмущений, шумов.

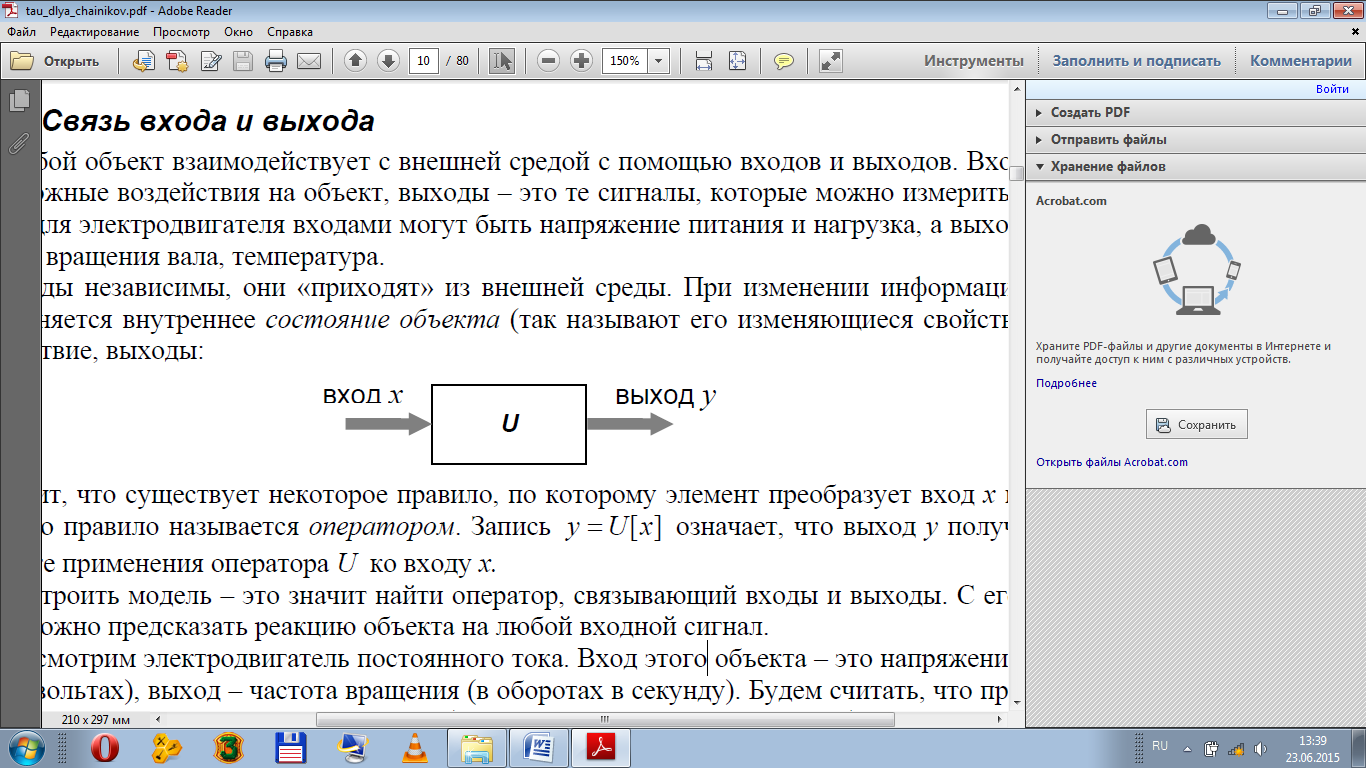
***Модель***– это объект, который мы используем для изучения другого объекта (*оригинала*).

Модель и оригинал должны быть в чем-то похожи, чтобы выводы, сделанные при изучении модели, можно было бы (с некоторой вероятностью) перенести на оригинал. Нас будут интересовать в первую очередь ***математические модели***, выраженные в виде формул. Кроме того, в науке используются также описательные (словесные), графические, табличные и другие модели.

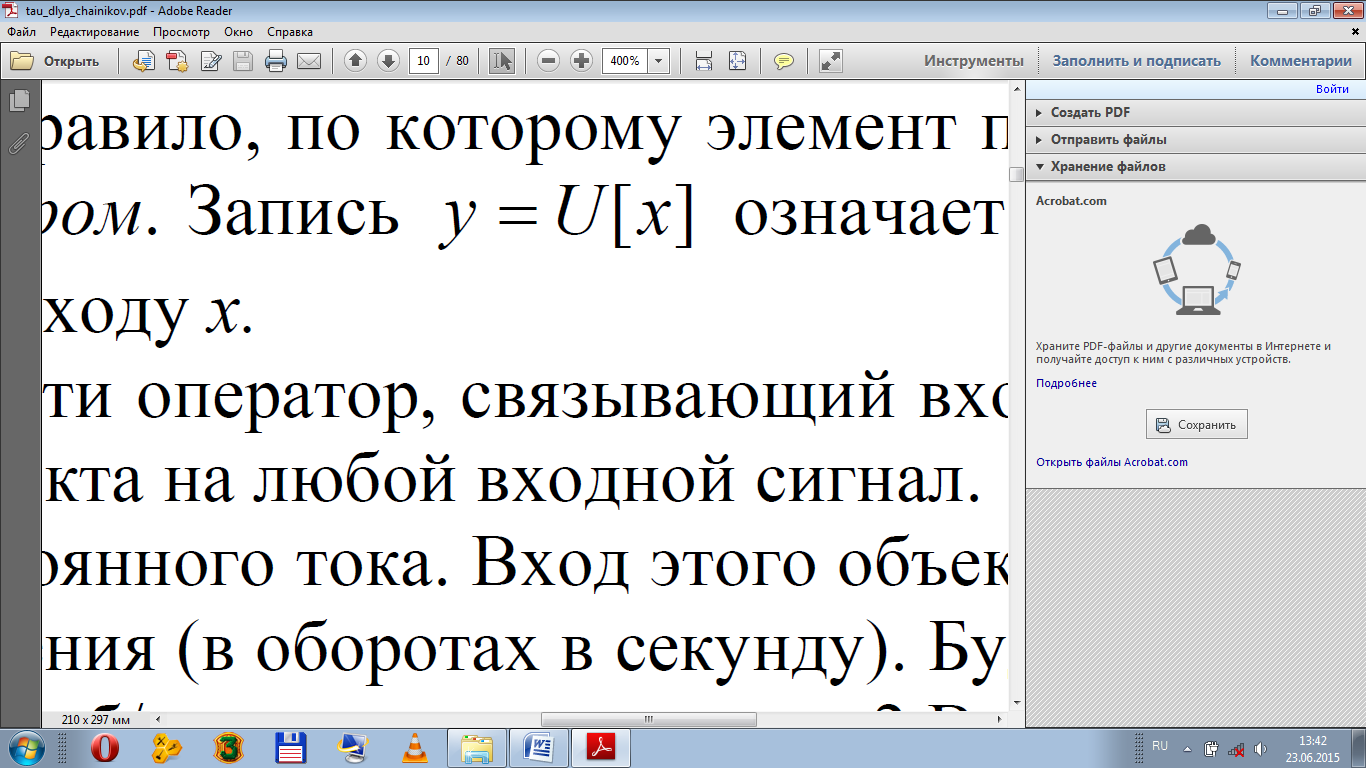
***Связь входа и выхода***

Любой объект взаимодействует с внешней средой с помощью входов и выходов. ***Входы*** – это возможные воздействия на объект, ***выходы*** – это те сигналы, которые можно измерить. Например, для электродвигателя входами могут быть напряжение питания и нагрузка, а выходами – частота вращения вала, температура.

Входы независимы, они «приходят» из внешней среды. При изменении информации на входе меняется внутреннее ***состояние объекта***(так называют его изменяющиеся свойства) и, как следствие, выходы:



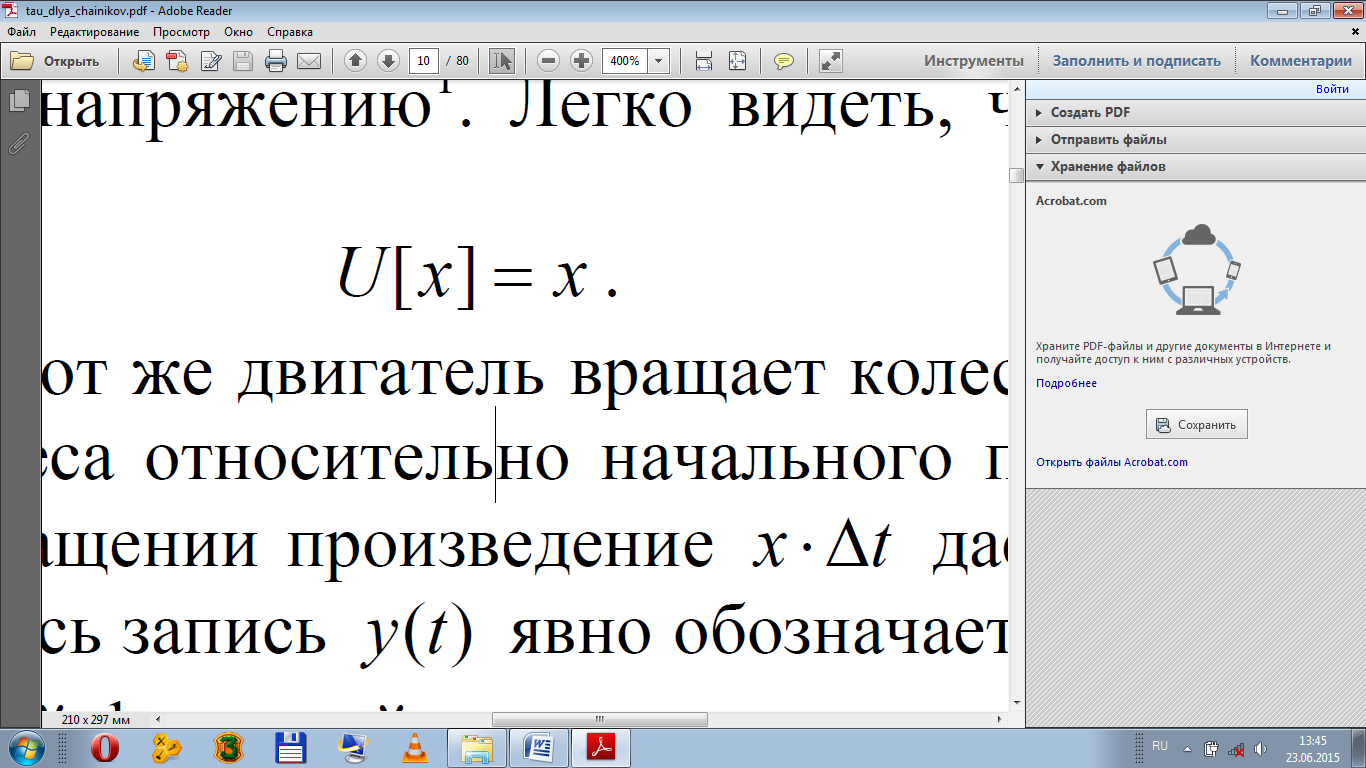
Это значит, что существует некоторое правило, по которому элемент преобразует вход (***x****)* в выход (***y****)*. Это правило называется *оператором*.   
Запись



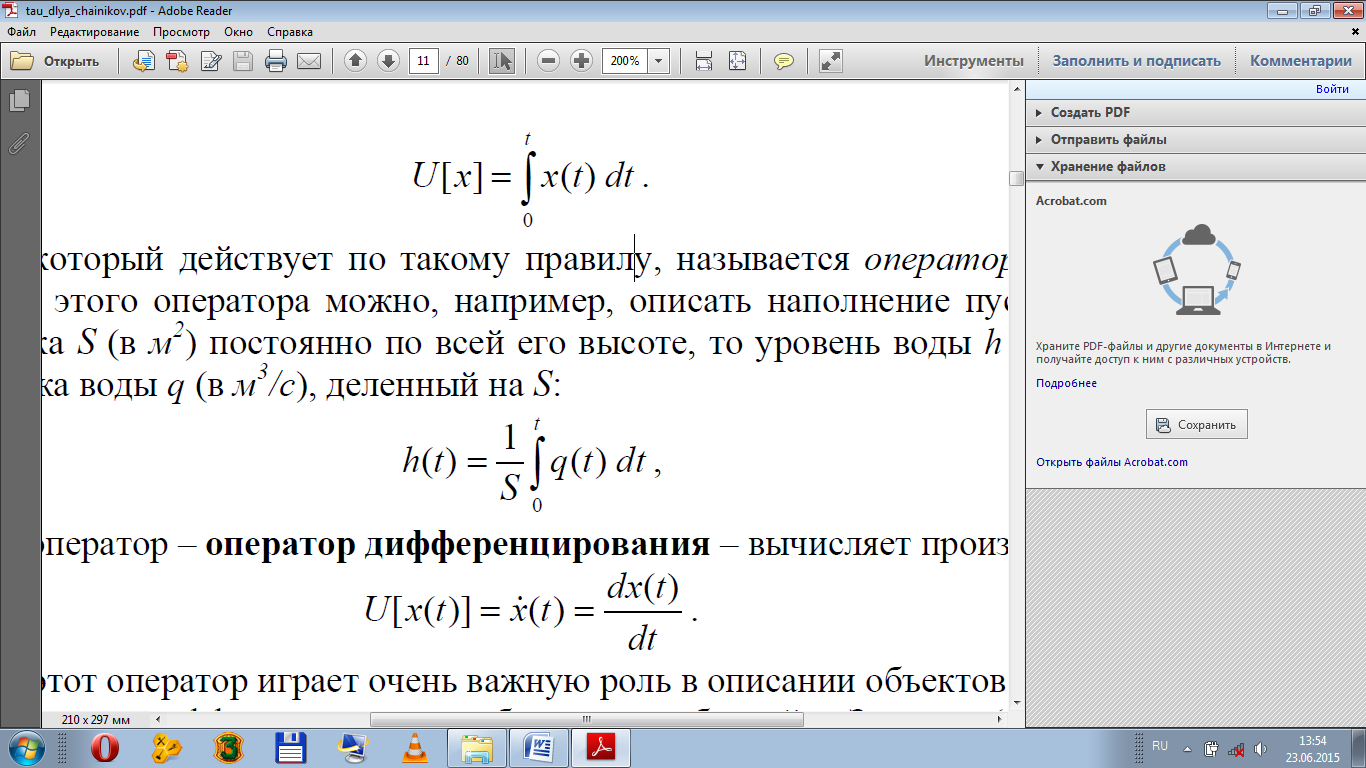
означает, что выход ***y***получен в результате применения оператора *U* ко входу ***x****.*

Построить модель – это значит найти оператор, связывающий входы и выходы. С его помощью можно предсказать реакцию объекта на любой входной сигнал.

Рассмотрим электродвигатель постоянного тока. Вход этого объекта – это напряжение питания (в вольтах), выход – частота вращения (в оборотах в секунду). Будем считать, что при напряжении 1 В частота вращения равна 1 об/сек, а при напряжении 2 В – 2 об/сек, то есть частота вращения равна по величине напряжению1. Легко видеть, что действие такого оператора можно записать в виде

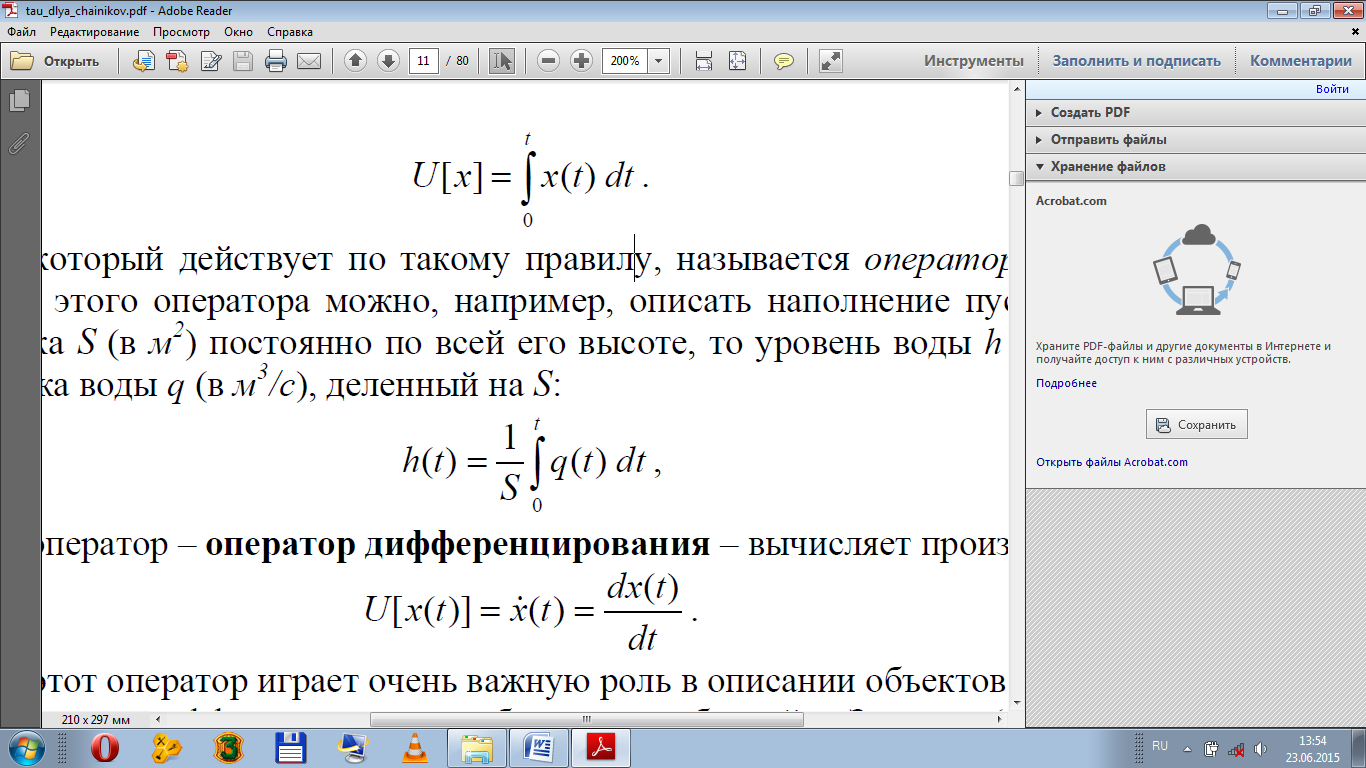


Теперь предположим, что этот же двигатель вращает колесо и в качестве выхода объекта мы выбрали число оборотов колеса относительно начального положения (в момент *t* = 0 ). В этом случае при равномерном вращении произведение *x×*Δ*t* дает нам количество оборотов за время Δ*t* , то есть *y*(*t*) = *x×*Δ*t* (здесь запись *y*(*t*) явно обозначает зависимость выхода от времени *t* ). Можно ли считать, что этой формулой мы определили оператор *U* ? Очевидно, что нет, потому что полученная зависимость справедлива только для постоянного входного сигнала. Если напряжение на входе *x*(*t*) меняется (все равно как), угол поворота запишется в виде интеграла



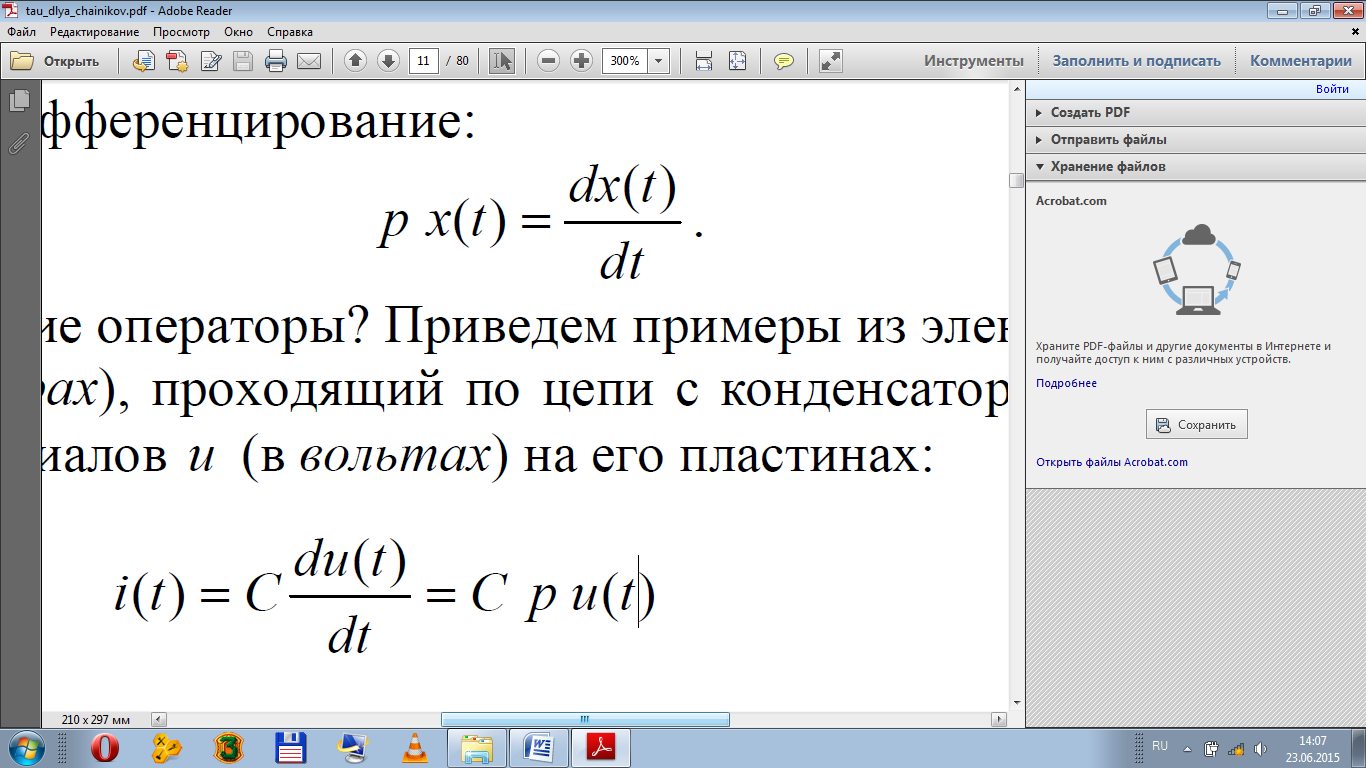
Оператор, который действует по такому правилу, называется ***оператором интегрирования*.**

Обратный оператор – ***оператор дифференцирования*** – вычисляет производную:

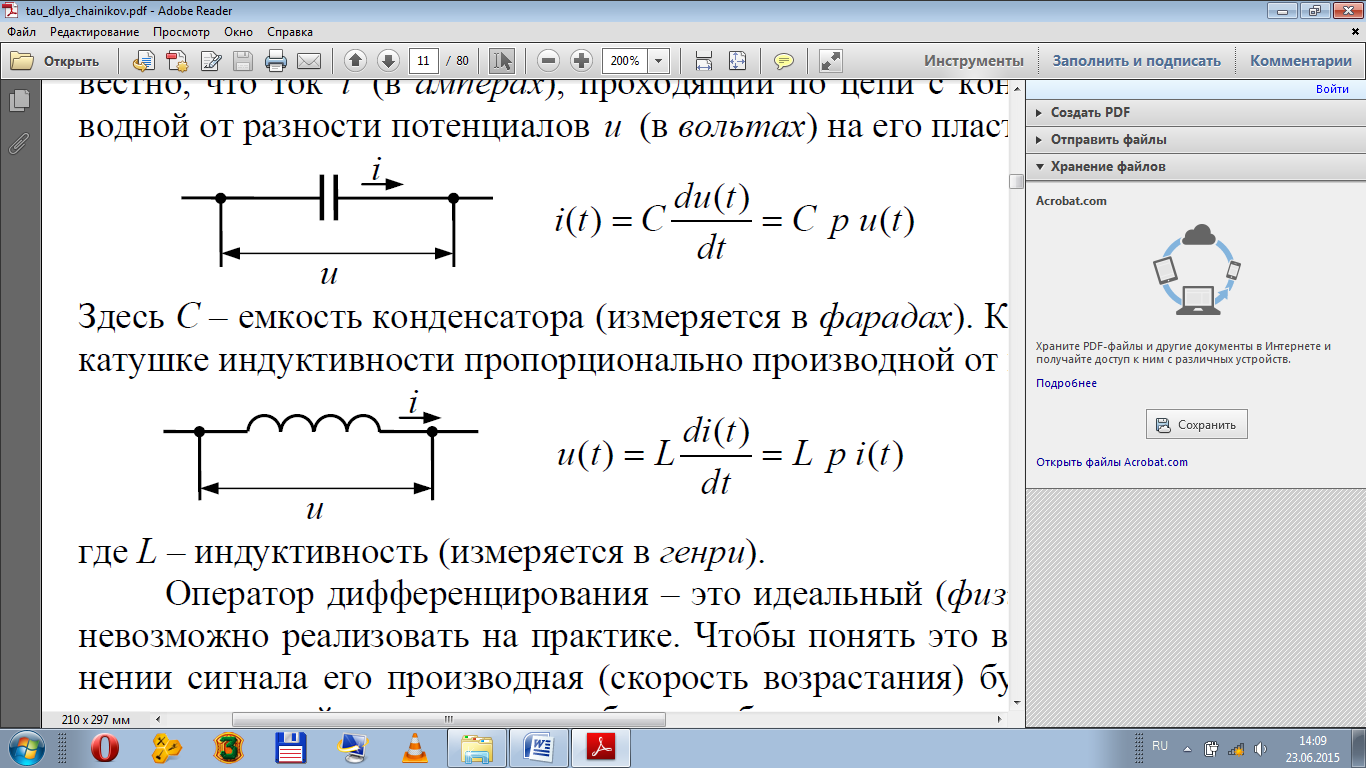
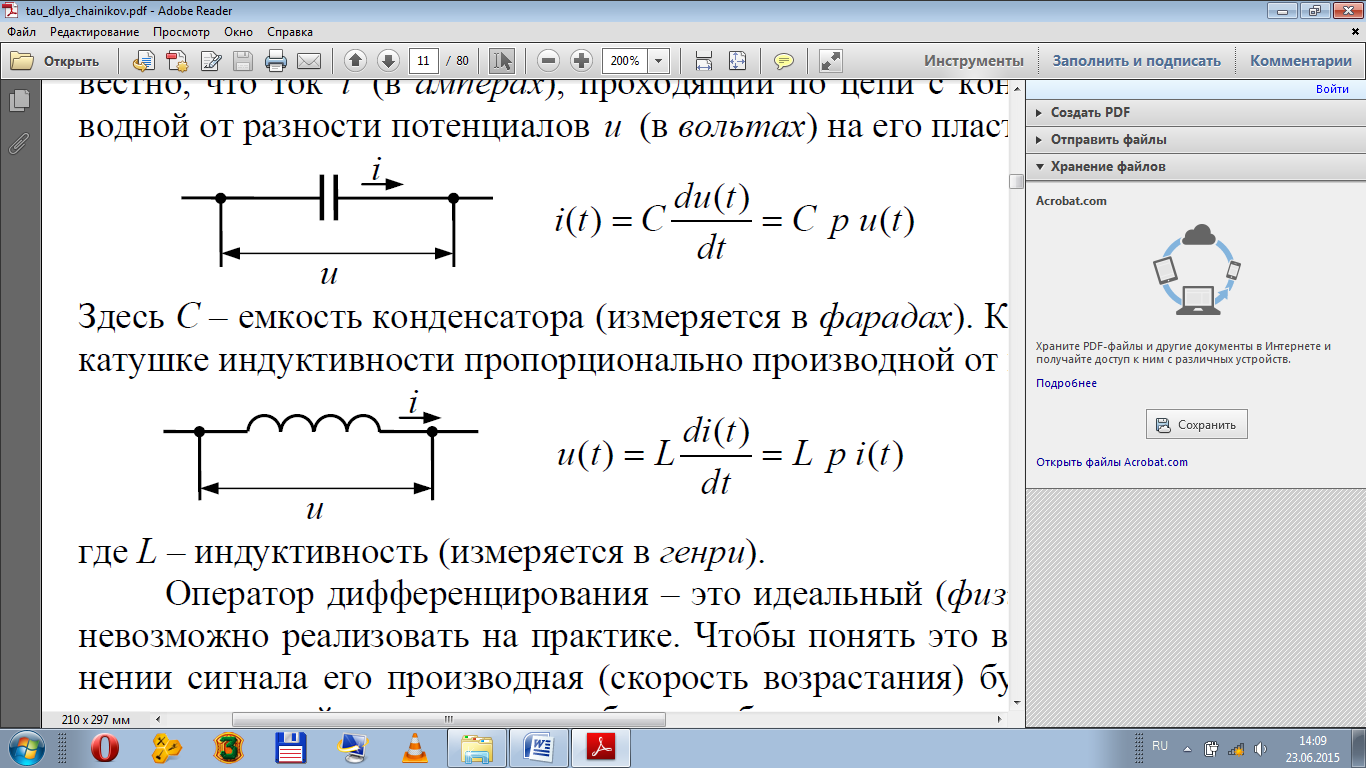


Этот оператор играет очень важную роль в описании объектов управления.

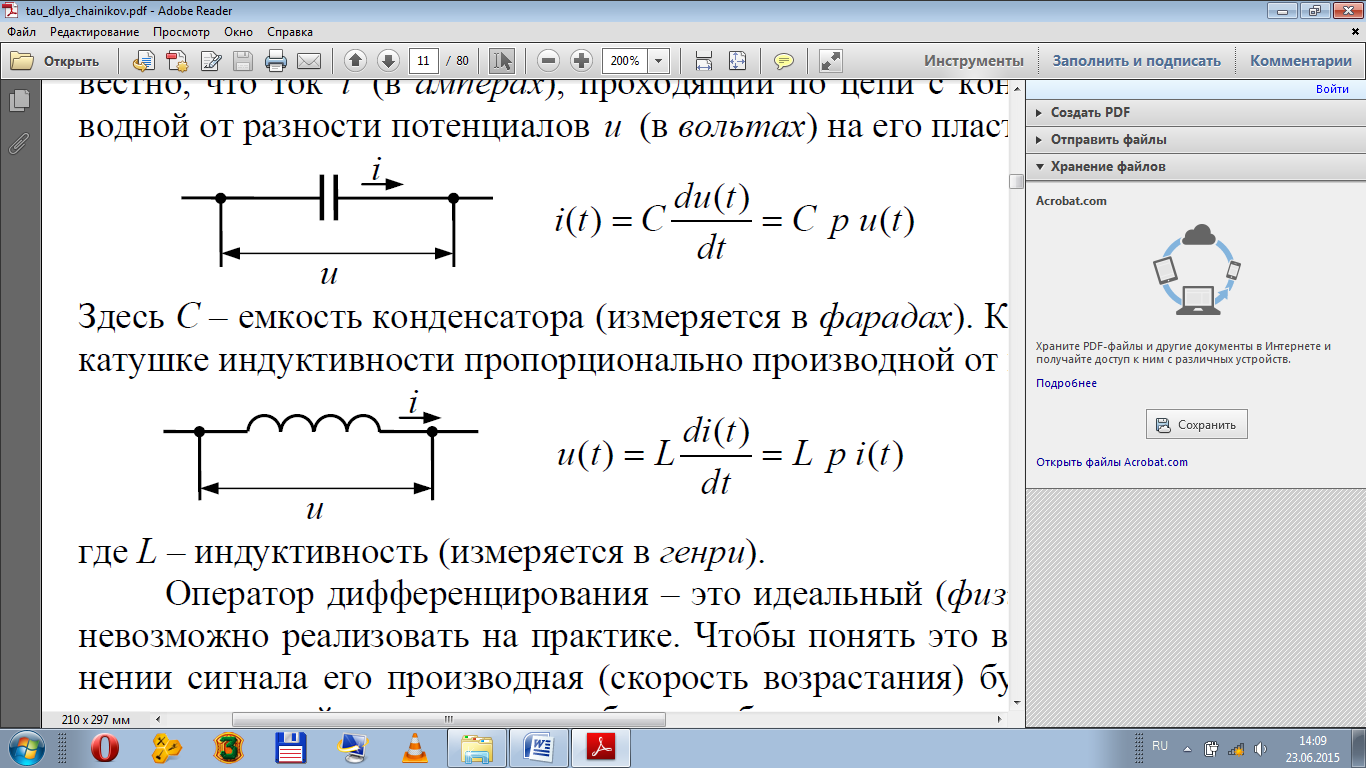
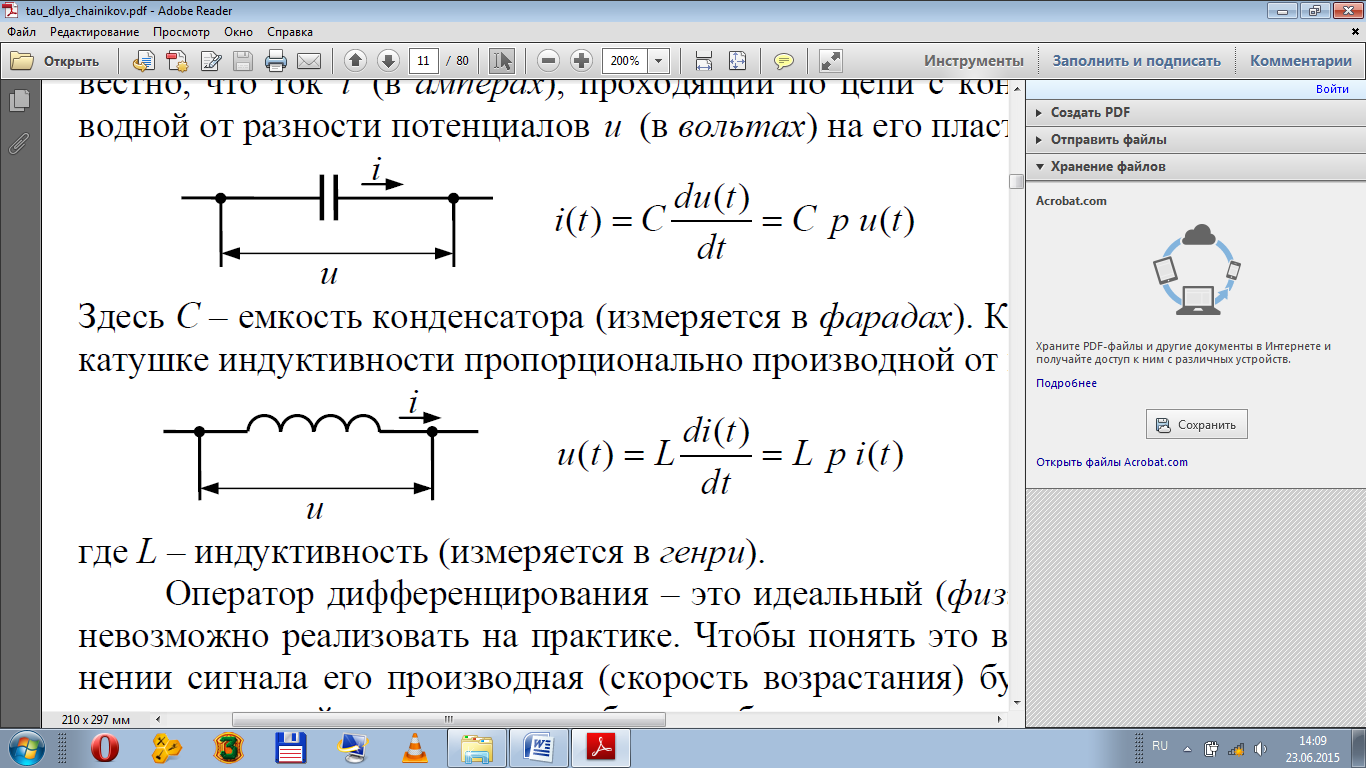
Обычно оператор дифференцирования обозначается буквой *p*. Запись *y*(*t*) = *p x*(*t*) внешне выглядит как «умножение» оператора *p* на сигнал *x*(*t*) , но на самом деле обозначает *действие* этого оператора, то есть дифференцирование:



Где встречаются такие операторы? Приведем примеры из электротехники. Например, известно, что ток ***i***(в *амперах*), проходящий по цепи с конденсатором, пропорционален производной от разности потенциалов ***u***(в *вольтах*) на его пластинах:

Здесь *C* – емкость конденсатора (измеряется в *фарадах*). Кроме того, падение напряжения *u* на катушке индуктивности пропорционально производной от проходящего тока *i* :

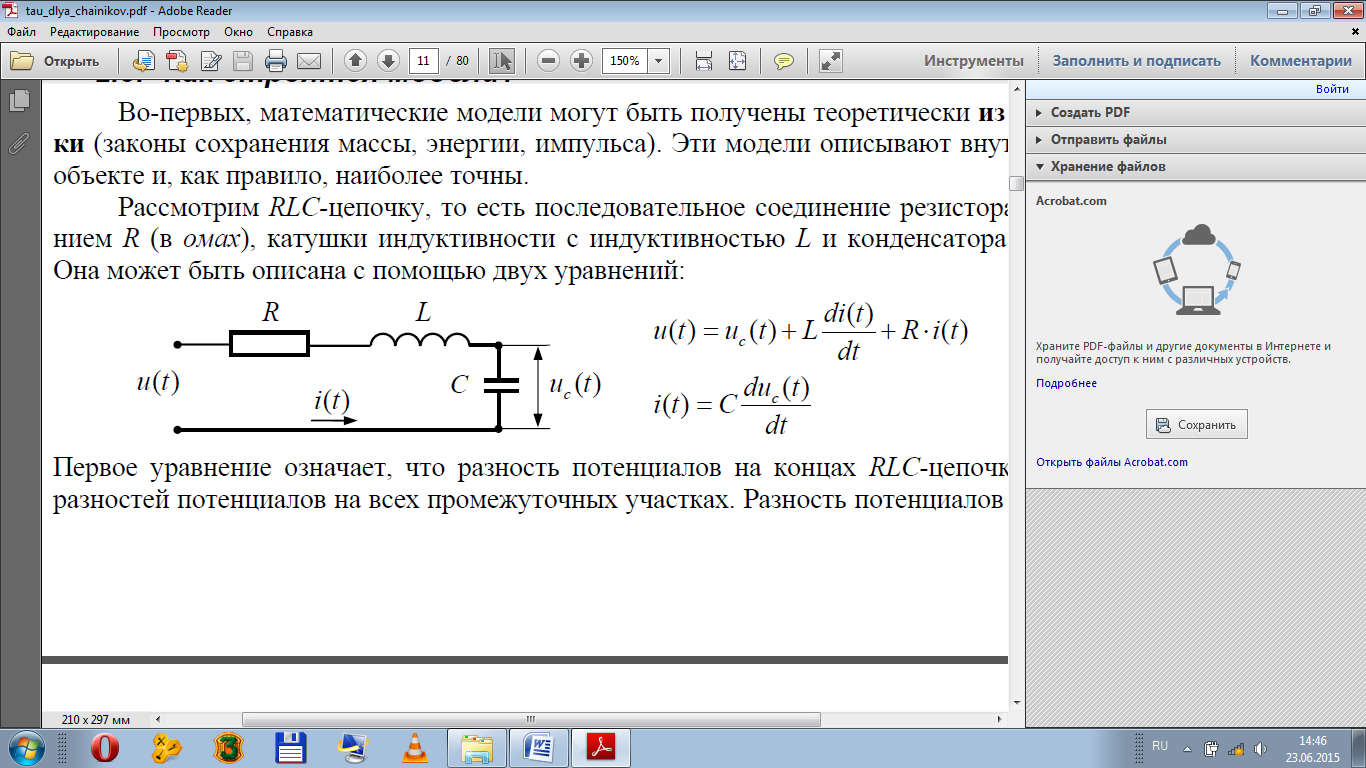
где *L* – индуктивность (измеряется в *генри*).

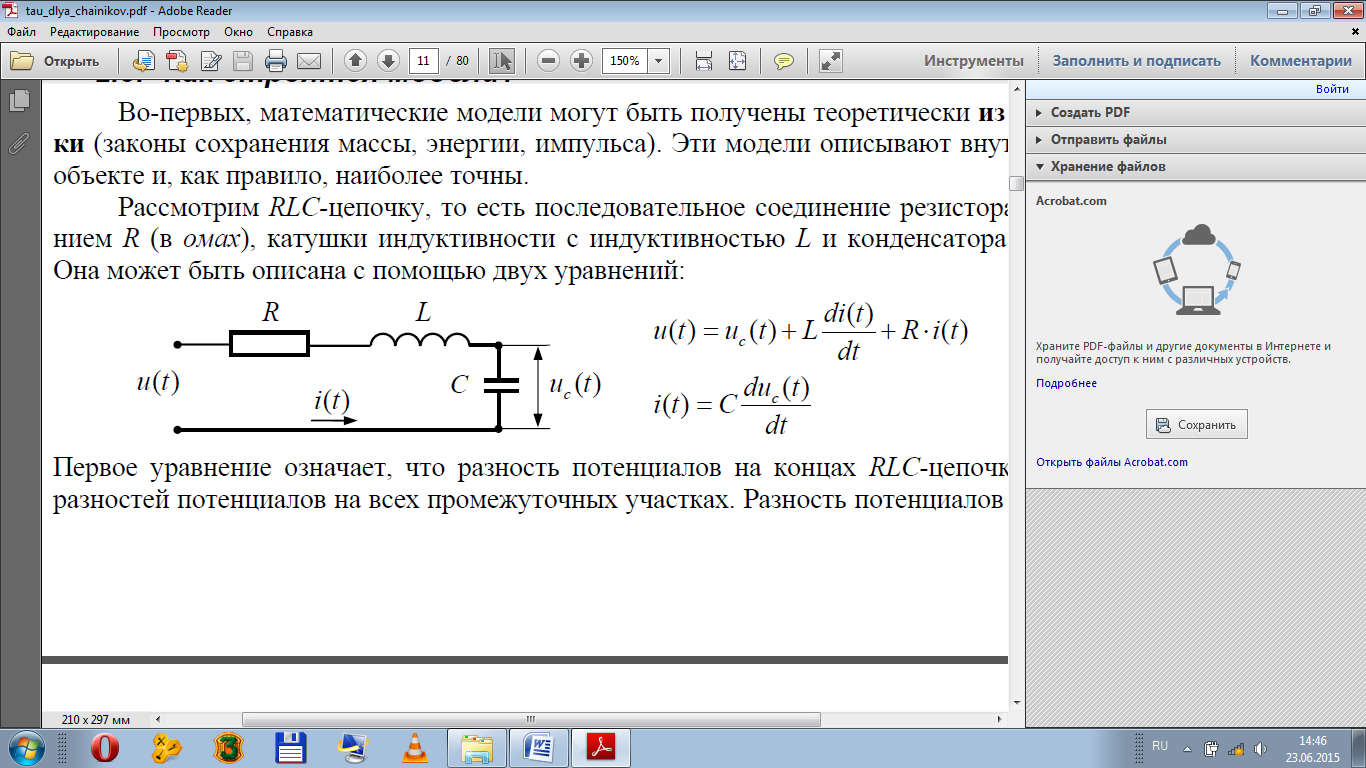
Оператор дифференцирования – это идеальный (*физически нереализуемый*) оператор, его невозможно реализовать на практике. Чтобы понять это вспомним, что при мгновенном изменении сигнала его производная (скорость возрастания) будет равна бесконечности, а никакое реальное устройство не может работать с бесконечными сигналами.

***Построение математических моделей***

Во-первых, математические модели могут быть получены теоретически из законов физики(законы сохранения массы, энергии, импульса). Эти модели описывают внутренние связи в объекте и, как правило, наиболее точны.

Рассмотрим *RLC-*цепочку, то есть последовательное соединение резистора с сопротивлением *R* (в *омах*), катушки индуктивности с индуктивностью *L* и конденсатора с емкостью *C*. Она может быть описана с помощью двух уравнений:





Первое уравнение означает, что разность потенциалов на концах *RLC-*цепочки равна сумме разностей потенциалов на всех промежуточных участках. Разность потенциалов *R*⋅***i***(*t*) на резисторе вычисляется по закону Ома, а на катушке – по формуле, приведенной в предыдущем параграфе. Второе уравнение описывает связь между напряжением и током для конденсатора.

Вход этого объекта – напряжение *u*(*t*) на концах цепочки, а выход – разность потенциалов *uс*(*t*)на пластинах конденсатора.

Второй способ – построение модели в результате **наблюдения за объектом** при различных входных сигналах (этим занимается *теория идентификации*). Объект рассматривается как «черный ящик», то есть, его внутреннее устройство неизвестно. Мы смотрим, как он реагирует на входные сигналы, и стараемся подстроить модель так, чтобы выходы модели и объекта совпадали как можно точнее при разнообразных входах.

На практике часто используется смешанный способ: структура модели (вид уравнения, связывающего вход и выход) определяется из теории, а коэффициенты находят опытным путем.

Например, общий вид уравнений движения корабля хорошо известен, однако в этих уравнениях есть коэффициенты, которые зависят от многих факторов (формы корпуса, шероховатости поверхности и т.п.), так что их крайне сложно (или невозможно) найти теоретически. В этом случае для определения неизвестных коэффициентов строят масштабные модели и испытывают их в бассейнах по специальным методикам. В авиастроении для тех же целей используют аэродинамические трубы.

Для любого объекта управления можно построить множество различных моделей, которые будут учитывать (или не учитывать) те или иные факторы. Обычно на первом этапе стараются описать объект как можно более подробно, составить детальную модель. Однако при этом будет трудно теоретически рассчитать закон управления, который отвечает заданным требованиям к системе. Даже если мы сможем его рассчитать, он может оказаться слишком сложным для реализации или очень дорогим.

С другой стороны, можно упростить модель объекта, отбросив некоторые «детали», которые кажутся разработчику маловажными. Для упрощенной модели закон управления также получается проще, и с его помощью часто можно добиться желаемого результата. Однако в этом случае нет гарантии, что он будет так же хорошо управлять полной моделью (и реальным объектом).

Обычно используется компромиссный вариант. Начинают с простых моделей, стараясь спроектировать регулятор так, чтобы он «подходил» и для сложной модели. Это свойство называют *робастностью* (*грубостью*) регулятора (или системы), оно означает нечувствительность к ошибкам моделирования. Затем проверяют работу построенного закона управления на полной модели или на реальном объекте. Если получен отрицательный результат (простой регулятор «не работает»), усложняют модель, вводя в нее дополнительные подробности. И все начинается сначала.

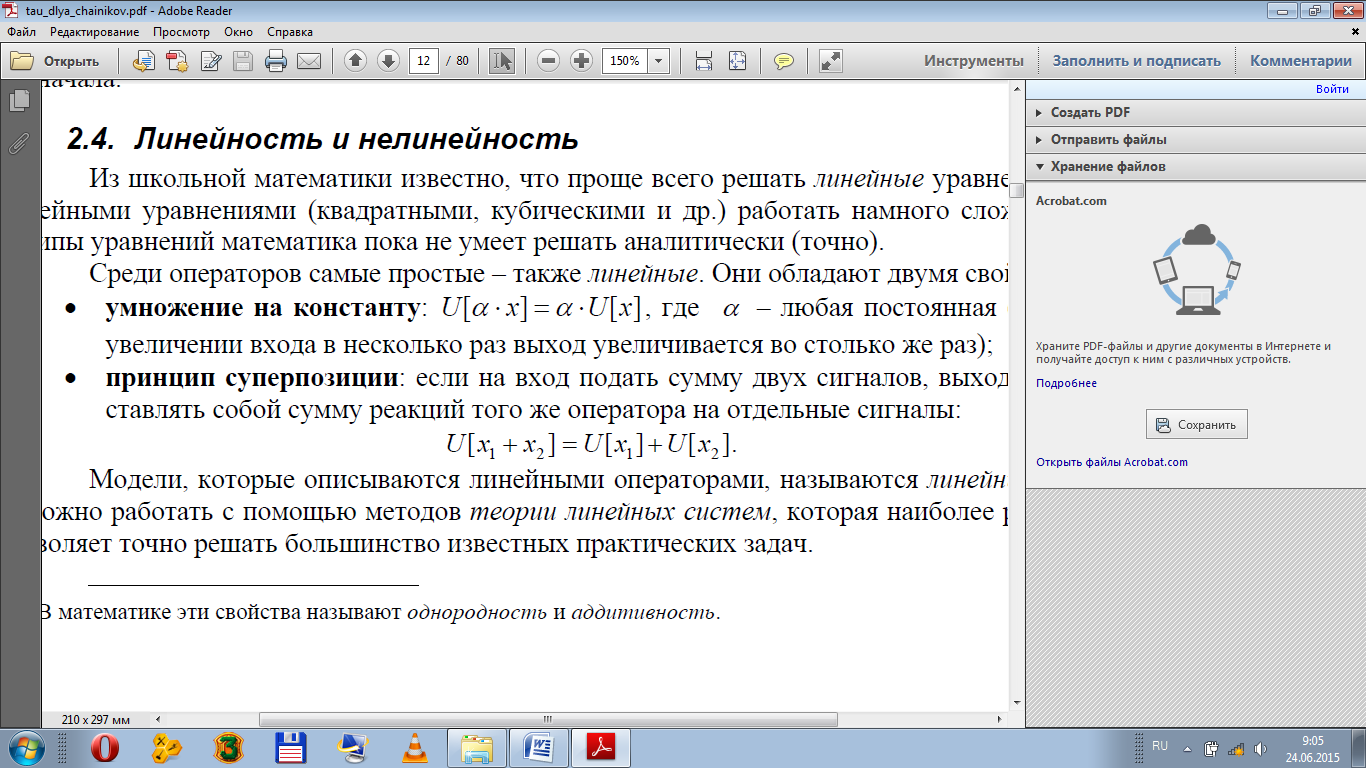
***Линейность и нелинейность***

Из школьной математики известно, что проще всего решать *линейные* уравнения. С нелинейными уравнениями (квадратными, кубическими и др.) работать намного сложнее, многие типы уравнений математика пока не умеет решать аналитически (точно).

Среди операторов самые простые – также *линейные*. Они обладают двумя свойствами2:

• **умножение на константу**: *U*[α × *x*] =α ×*U*[*x*] , где α – любая постоянная (то есть, при увеличении входа в несколько раз выход увеличивается во столько же раз);

• **принцип суперпозиции**: если на вход подать сумму двух сигналов, выход будет представлять собой сумму реакций того же оператора на отдельные сигналы:



Модели, которые описываются линейными операторами, называются *линейными.* С ними можно работать с помощью методов *теории линейных систем*, которая наиболее развита и позволяет точно решать большинство известных практических задач.

Однако, все модели реальных систем – *нелинейные*. Это легко понять хотя бы потому, что всегда есть предельно допустимое значение входного сигнала – при его превышении объект может просто выйти из строя или даже разрушиться (линейность нарушается). Методы исследования нелинейных операторов очень сложны математически, в *теории нелинейных систем* точные решения известны только для достаточно узкого круга задач. Здесь пока больше «белых пятен», чем полученных результатов, хотя это научное направление активно развивается в последние годы.

Чаще всего сначала проводят *линеаризацию* нелинейной модели объекта (привода), то есть строят приближенную линейную модель. Затем на основе этой модели проектируют закон управления, применяя точные методы теории линейных систем. Наконец, проверяют полученный регулятор с помощью компьютерного моделирования на полной нелинейной модели.

Нужно отметить, что если объект или привод имеют так называемую «существенную» нелинейность, этот подход может не сработать. Тогда приходится использовать методы нелинейной теории, а также компьютерное моделирование. Моделирование стало очень популярным в последнее время, поскольку появились мощные компьютерные программы для проведения вы-числительных экспериментов, и можно проверить поведение системы при разнообразных допустимых входных сигналах.

1. **Модели линейных объектов**

Математическое описание линейного непрерывного динамического элемента системы сводится к описанию связи между его входом и выходом. Данная связь может быть задана в виде:

1) Линейного дифференциального уравнения;

2) Передаточной функции;

3) Частотных характеристик;

4) Временных характеристик;

5) Переменных состояния.

***Дифференциальные уравнения***

Как уже отмечалось, распространенной формой описания линейных непрерывных ДЭ (ДС) являются линейные дифференциальные уравнения. Реальные объекты не могут мгновенно изменять свое состояние, поэтому вместо статических моделей используют *динамические* модели, которые описываются дифференциальными уравнениями, содержащими производные (скорости изменения сигналов).

Например:  - во временной области;

 - в области изображений по Лапласу.

***Передаточная функция***

***\***

Передаточная функция ДЭ равна отношению изображения по Лапласу выходного сигнала y(p) к изображению входного воздействия x(p) при нулевых начальных условиях .

Рассмотрим линейное ДУ, описывающее динамику системы (связь между входом и выходом) во временной области.



При записи дифференциального уравнения в области изображений по Лапласу необходимо подвергнуть преобразованию левую и правую части уравнения:



Примем начальные условия уравнения (1.9) нулевыми. Тогда, преобразуя уравнение



получим





Передаточная функция имеет вид



*Основные свойства передаточной функции АС:*

1. ПФ не зависит от входных и выходных сигналов, а только от структуры и параметров АС.
2. Для технически реализуемых систем m ≤ n.
3. Полином знаменателя А(p) – называется **характеристическим**, а его корни, А(p)=0,  - называются **полюсами передаточной функции**.

.

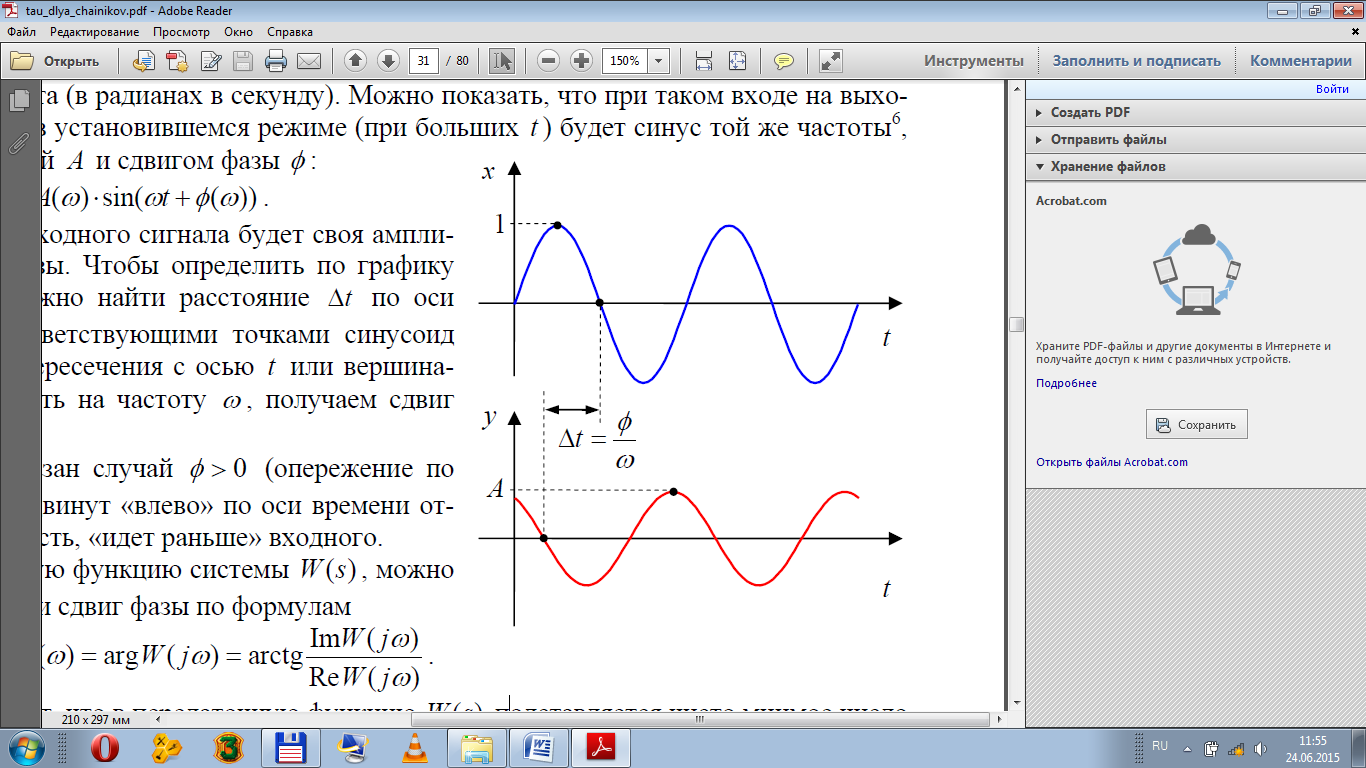
***Частотные характеристики***

Частотной характеристикой АС - называется ее реакция на входной гармонический сигнал произвольной частоты.

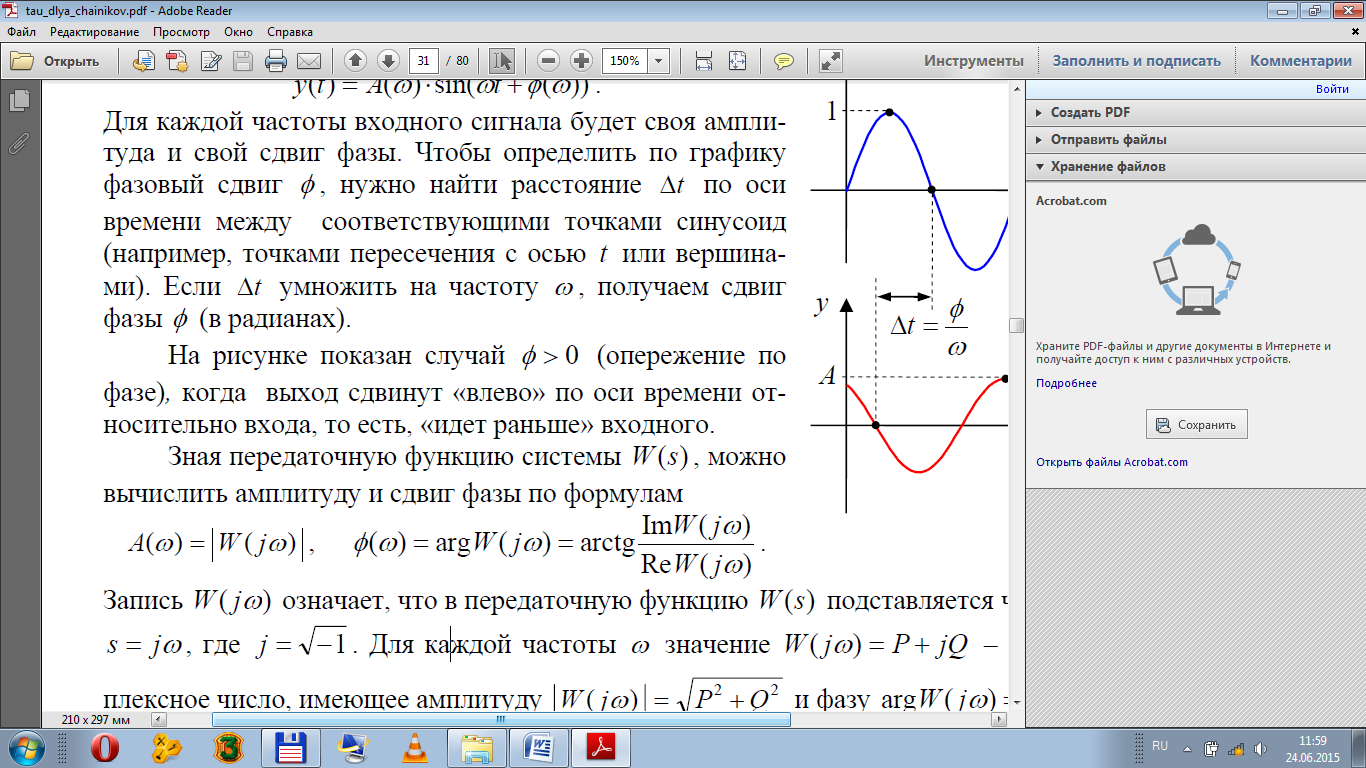
Частотные характеристики можно получать путем сравнивания амплитуд и фаз гармонических сигналов на входе и выходе системы при изменении частоты.



Для каждой частоты входного сигнала будет своя амплитуда и свой сдвиг фазы. Чтобы определить по графику фазовый сдвиг φ , нужно найти расстояние Δ*t* по оси времени между соответствующими точками синусоид (например, точками пересечения с осью *t* или вершинами). Если Δ*t* умножить на частоту ω , получаем сдвиг фазы φ (в радианах). На рисунке показан случай φ > 0 (опережение по фазе)*,* когда выход сдвинут «влево» по оси времени относительно входа, то есть, «идет раньше» входного.



Зная передаточную функцию системы, можно вычислить амплитуду и сдвиг фазы по формулам:



Частотные характеристики получают на основе их связи с передаточными функциями путем замены оператора *р* на jω:

.

Функцию  называют частотной передаточной функцией. Эта функция является комплексной функцией частоты ω и может быть представлена в показательной и алгебраической формах.

В показательной форме



Где  - АЧХ.

 - ФЧХ.

В алгебраической форме



где



которые называют соответственно вещественной и мнимой частотными характеристиками системы. Между показательной и алгебраической формами существует определенная связь, выражаемая формулами:



Частотную передаточную функцию  можно изобразить на комплексной плоскости, на которой для каждой частоты ω можно отложить  и его аргумент, т.е. угол между действительной полуосью и вектором . Кривую которую описывает конец вектора  при изменении частоты от нуля до бесконечности, называют амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ).



***Временные характеристики***

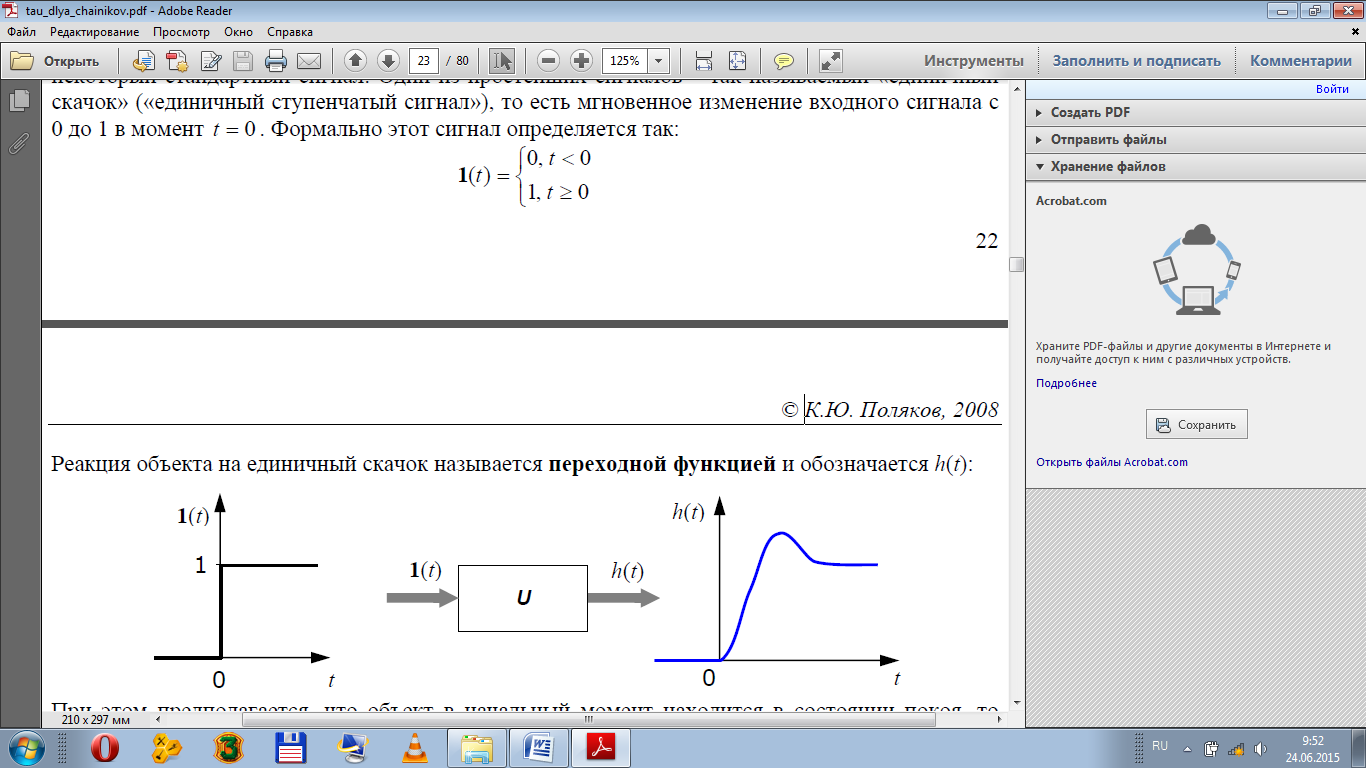
Под временными характеристиками понимают реакцию АС на типовое задающее воздействие. Различают две временные характеристики импульсную (весовую) и переходную.

Наглядные представления о динамических свойствах систем автоматического управления дают временные характеристики, к которым относятся *переходная характеристика* и *импульсная переходная характеристика*, являющиеся графическим изображением переходной функции и импульсной переходной функции соответственно.

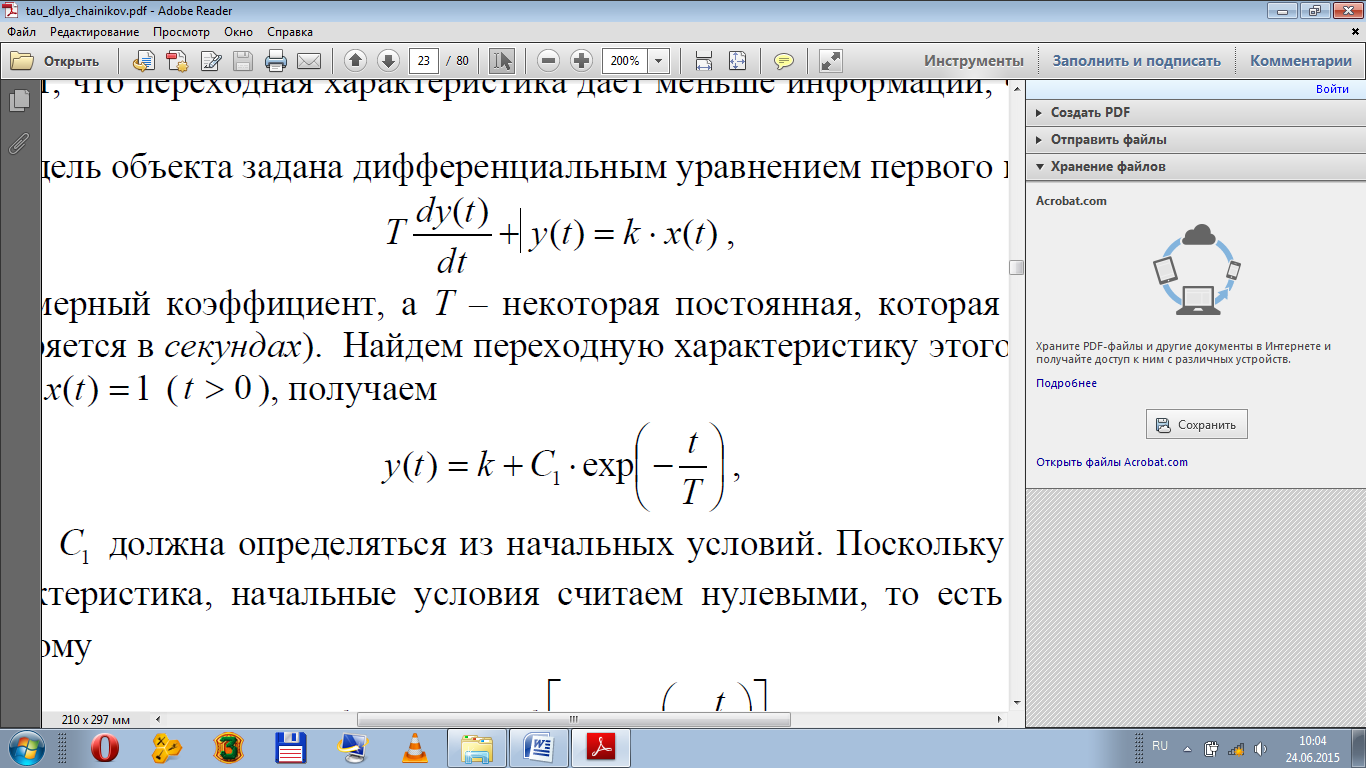
***Переходной функцией*** системы или звена называют реакцию системы (звена) на единичное входное воздействие при нулевых начальных условиях. Переходную функцию обозначают h(t), a входное воздействие



Реакция объекта на единичный скачок

******

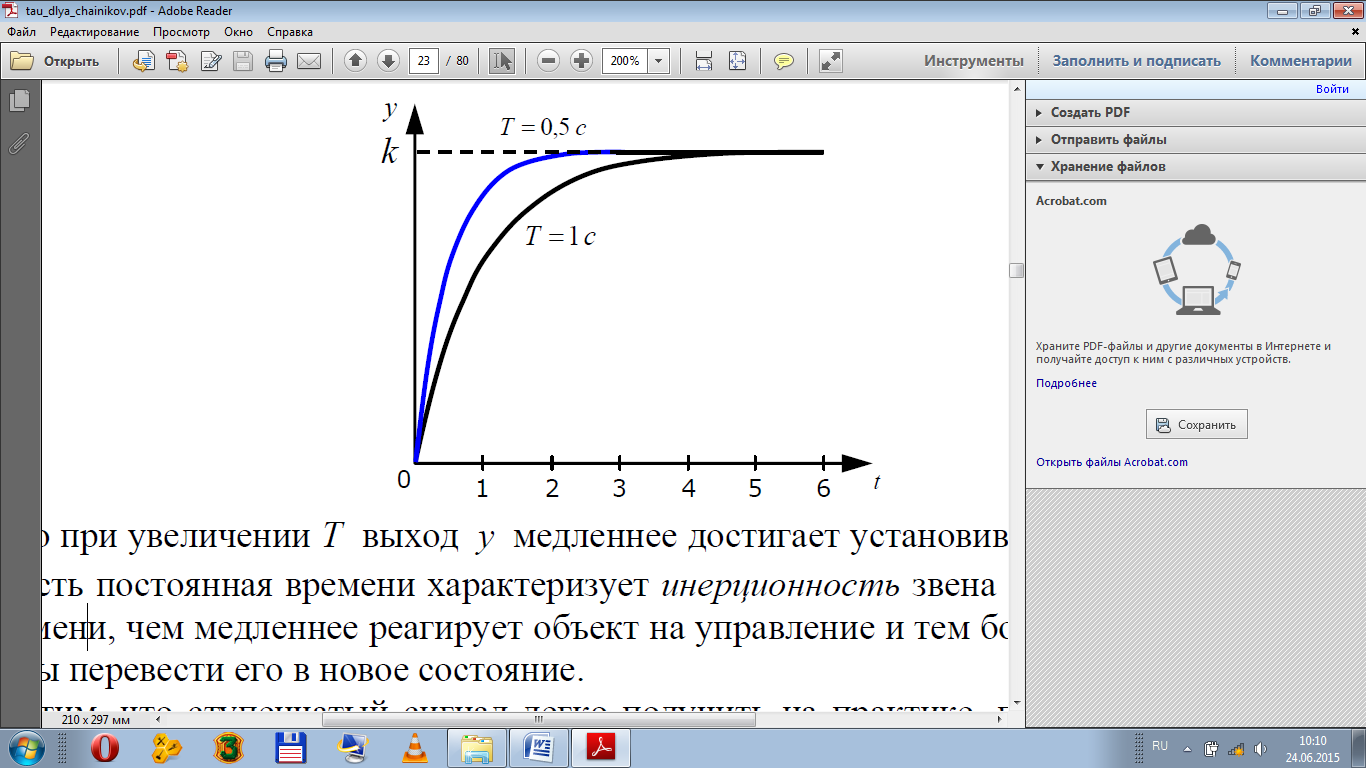
Если модель объекта задать дифференциальным уравнением первого порядка:



то *h*(*t*) – это не что иное, как у(*t*), то есть *h*(*t*) = у(*t*) – выход звена АС.

где *k* – безразмерный коэффициент (усиления), а *T –* некоторая постоянная, которая имеет размерность времени (измеряется в *секундах*).

На рисунке показаны переходные характеристики при различных значениях параметра *T*, который называется **постоянной времени** звена:



Видно, что при увеличении *T* выход (***y***) медленнее достигает установившегося значения, равного ***k***, то есть постоянная времени характеризует ***инерционность* звена**. Чем больше постоянная времени, чем медленнее реагирует объект на управление и тем больше усилий нужно для того, чтобы перевести его в новое состояние.

***Импульсной переходной или весовой функцией системы*** (звена) называют функцию, описывающую реакцию системы на единичное импульсное воздействие (δ(t) - дельта функцию) при нулевых начальных условиях. Обозначают эту функцию через g(t). Она связана с переходной функцией выражением



откуда 

***Переменные состояния***

Под переменными состояния понимают минимальный набор переменных, который в данный момент времени вместе со значениями входных переменных определяет поведение системы во все последующие моменты времени.