**ЧАСТОТНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ**

Частотные критерия устойчивости позволяют судить об устойчивости системы по ее частотным характеристикам. Из частотных критериев устойчивости наиболее удобны для практического использования критерии устойчивости Михайлова и Найквиста (данные критерии являются графоаналитическими).

**1. Критерий устойчивости Михайлова.**

Более общим критерием исследования устойчивости как разомкнутых, так и замкнутых АС, является критерий Михайлова, предполагающий построение годографа вектора *A(jω)* характеристического полинома *A(р)* и определение полного угла поворота вектора ψА при изменении частоты *ω* от 0 до ∞.

Подстановкой *p=jω* в характеристический полином

, имеем , или

****** , (6.1)

где *AI(ω)*  - вещественная часть (содержит четные степени *ω*);

*AII(ω)* - мнимая часть (содержит нечетные степени *ω*);

*А(ω) -* модуль вектора *A(jω);*

*ψA(ω)* - аргумент вектора *A(jω).*

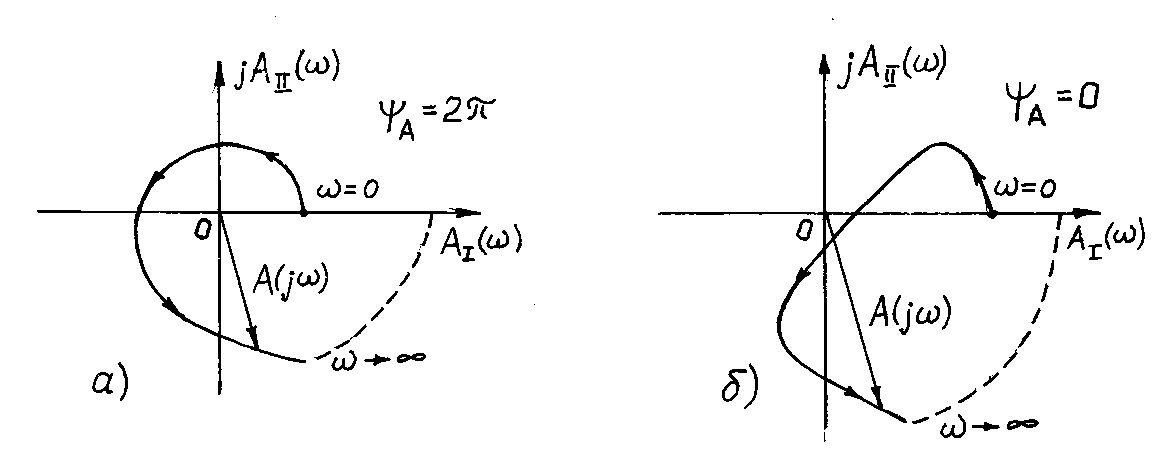
При заданных коэффициентах *а1, а2 ..., аn* и определенной частоте *ω* величина *A(jω)* на комплексной плоскости изобразится в виде точки с координатами *AI(ω)* и *AII(ω)* или в виде вектора, соединяющего начало координат с этой точкой.

При непрерывном изменении *ω* от 0 до ∞ вектор будет изменяться по величине и направлению, описывая своим концом некоторую кривую (годограф), которая называется кривой Михайлова. При этом величина *ψA* есть приращение аргумента комплексной функции *A(jω)* при изменении частоты 0≤*ω*≤∞  - полный угол поворота радиус-вектора годографа.

Рассмотрим следующие случаи:

(для характеристического полинома 4-го порядка)

1) Годограф *A(jω)* не проходит через начало координат (мнимые корни отсутствуют)



АС устойчива АС неустойчива

Рис. 6.1

2) Годограф *A(jω)* проходит через начало координат

|  |  |
| --- | --- |
| Ris-5_5 есть два чисто мнимых  корня (АС на границе  колебательной устойчивости) | есть нулевой корень  (т. к. *а = 0* АС на границе  апериодической устойчивости) |

Рис. 6.2

При прохождении годографа *A(jω)* через начало координат при *ω = 0, ω1, ω2, ..., ωk* принимается

 (6.2)

В общем случае (без доказательства) угол поворота вектора *A(jω)*при изменении частоты *ω* от 0 до ∞ определяется выражением

 (6.3)

где n - общее число корней характеристического уравнения (равно порядку АС);

μ - число корней в правой полуплоскости (с положительной вещественной частью);

ν - число нейтральных корней (чисто мнимых или нулевых).

Соотношение (6.3) позволяет определять число корней в правой полуплоскости по виду кривой Михайлова.

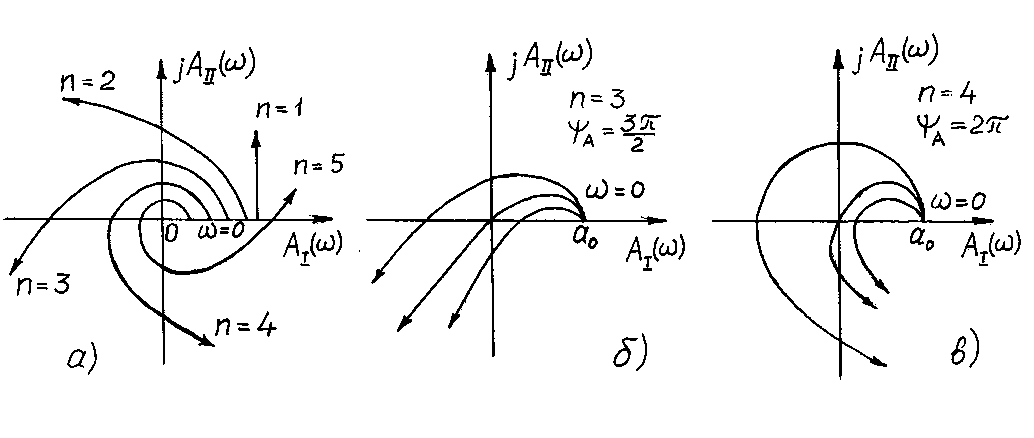
Так как для устойчивой АС справедливо утверждение о том, что все корни должны иметь отрицательную вещественную часть, т. е. μ=0, ν=0, то математическая формулировка критерия Михайлова примет вид

 (6.4)

**Формулировка критерия Михайлова:**

АС устойчива тогда и только тогда, когда полный угол поворота радиус-вектора характеристического полинома *A(jω)* *n*-ой степени равен  при изменении частоты от 0 до ∞.

Для устойчивых систем кривая Михайлова всегда имеет спиралевидную форму, причем конец её уходит в бесконечность в том квадранте комплексной плоскости, номер которого равен степени *A(p)*.



В связи с этим возможна **другая формулировка критерия Михайлова**: АС устойчива тогда и только тогда, когда при изменении частоты от 0 до ∞ кривая Михайлова, начинаясь с вещественной положительной полуоси, последовательно проходит в положительном направлении *n* квадрантов.

Прохождение кривой Михайлова через начало координат означает, что АС находится на границе устойчивости и в точке О на частоте *ω0* *A(jω) = 0,* т. е.

*А*Ι(*ω0*) *= 0; АΙΙ(ω0) = 0* (6.5)

Данные равенства позволяют определить критическое значение параметра АС.

Если *А(р)* зависит от параметра *λ*, т. е. *А(р,λ),* то значение параметра *λкр* , при котором вектор *A(jω) = 0* называется критическим.

**2. Критерий устойчивости Найквиста.**

Сформулирован критерий в 1932 г. Критерий Найквиста позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по амплитудно-фазовой частотной характеристике разомкнутой системы.

Согласно критерию Найквиста для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы (годограф) при изменении частоты *ω* от *0* до *+∝* охватывала точку  *l* раз, где *l* -число корней характеристического уравнения разомкнутой системы, расположенных в правой полуплоскости. Это определение является исчерпывающим для всех систем.

Если разомкнутая система устойчива (*l=0*), то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы не охватывала точку  комплексной плоскости .

Если годограф АФЧХ (кривая, описываемая вектором W*(jω)*) при некоторой частоте  *ω* проходит через точку с координатами (-1,j0), то замкнутая система находится на границе устойчивости. Это возможно пояснить следующим образом (рис. 6.3, а)

Известно, что

 (6.6)

Если  т. е. амплитуда выходного сигнала разомкнутой АС равна амплитуде входного сигнала, а фаза выходного сигнала отличается от фазы входного сигнала на *-π,* то при замыкании АС возникает баланс фаз и амплитуд, что создает условия для возникновения гармонических колебаний. Частота колебаний равна значению частоты ωπ , при которой годограф АФЧХ проходит через точку (-1, j0).

Если годограф АФЧХ охватывает точку (-1, j0) (рис. 6.3, б), то в замкнутой системе возникают колебания с нарастающей амплитудой.

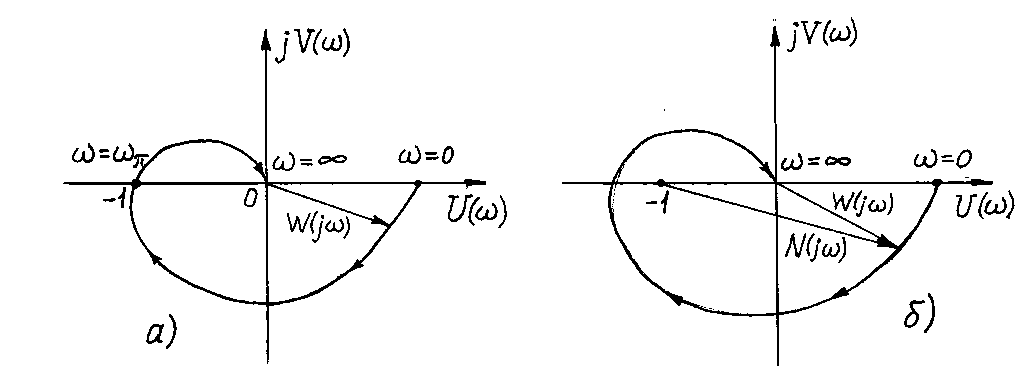


Рис. 6.3

Для применения критерия Найквиста необходимо определить угол поворота смещенного радиус-вектора *N(jω)* при изменении частоты от 0 до ∞ (рис. 6.3, б).

 (6.7)

а) Если разомкнутая АС устойчива, то критерий Найквиста формулируется так:

Для устойчивости замкнутой АС необходимо и достаточно, чтобы годограф АФЧХ *W(jω)* при изменении частоты не охватывал точку комплексной плоскости с координатами (-1, j0);

Особенностью частотного критерия устойчивости Найквиста является то, что он позволяет использовать экспериментальные снятые частотные характеристики отдельных элементов или всей системы. Следует отметить, что нормально функционирующая система не должна находиться на границе устойчивости, так как вследствие неизбежных отклонений ее параметров она может стать неустойчивой, т.е. требуется обеспечивать определенные запас устойчивости. Запас устойчивости при использовании критерия Найквиста определяют по амплитуде и фазе (рис. 6.4.).

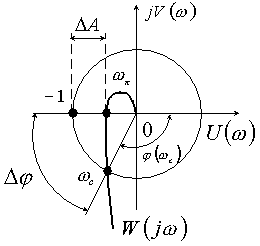


Рис. 6.4

Запас по амплитуде *ΔА* определяется как



где  значение АФЧХ на уровне *ϕ=-180°* ФЧХ.

Запас устойчивости по фазе *Δϕ* определяется из соотношения



где *ωс* - частота среза, соответствующая модулю АФЧХ 